МГТУ имени Н. Э. Баумана

Н.А. ГЛАДКОВ, М.А. ЯКОВЛЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

Методические указания к лабораторной работе М-5 по курсу общей физики.
Под редакцией А. И. Савельевой.

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы - изучение законов вращательного движения и определение моментов инерции твердых тел.

Вращательное движение твердого тела может происходить как вокруг неподвижной точки (сферическое движение), так и вокруг неподвижной оси. В первом случае закон изменения момента импульса тела представляется в виде векторного уравнения

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \,, \qquad (1)$$

где $\vec{L}$ - момент импульса тела, равный геометрической сумме моментов импульсов всех частиц $\vec{L}_i$ этого тела относительно неподвижной точки О, т.е.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i \,, \qquad (2)$$

$\vec{M}$ - результирующий момент всех внешних сил относительно, той же точки О.

Закон изменения момента импульса тела относительно оси, например оси Z, записывается в виде алгебраического уравнения

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z \,, \qquad (3)$$

где L_Z и M_Z проекции векторов $\vec{L}$ и $\vec{M}$ уравнения (1) на ось Z. Момент импульса тела относительно оси Z найдем, если спроецируем (2) на ось Z:

$$L_Z = \sum_{i=1}^{n} L_{iZ} \,.$$

После суммирования и преобразований приходим к соотношению

$$L_Z = J_Z \omega_Z \,, \qquad (4)$$

где ω_Z - угловая скорость вращения тела относительно оси Z; J_Z - момент инерции тела относительно той же оси. После подстановки (4) в уравнение (3) приходим к основному уравнению динамики вращательного движения

$$\frac{d\left(J_Z \omega_Z\right)}{dt} = M_Z \,.$$

Так как для твердого тела $J_Z = const$, то

$$J_Z \frac{d\omega_Z}{dt} = M_Z \qquad (5)$$

или

$$J_Z \varepsilon_Z = M_Z \,, \qquad (6)$$

где

$$\varepsilon_Z = \frac{d\omega_Z}{dt}$$

- угловое ускорение тела относительно оси Z.

Уравнения (5), (6) - уравнения динамики вращательного движения твердого тела вокруг оси Z.

Момент инерции тела К, например относительно оси Z, вычисляется по формуле

$$J_Z = \int\limits_{(K)} R^2 dm, \tag{7}$$

где dm - элемент массы тела; R - расстояние от этого элемента до оси Z. Единица измерения момента инерции в СИ [J]=кг·м^2. Формулу (7) можно использовать для теоретического определения момента инерции тела. Моменты инерции тела относительно параллельных осей Z и Z_C (ось Z_C проводится через точку С - центр масс или инерции тела) связаны формулой Штейнера

$$J_Z = J_{ZC} + md^2, \tag{8}$$

где J_{ZC} - момент инерции тела относительно оси Z_C;
m - масса тела;
d - расстояние между осями Z и Z_C.

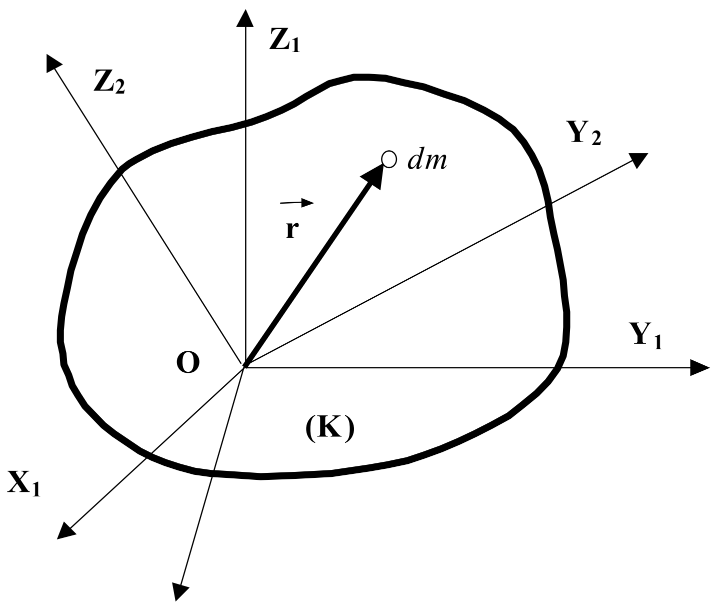

Рис.1

Момент инерции любого тела зависит также от ориентации оси. Например, моменты инерции цилиндра длиной l и радиусом R (R>>l) относительно прямоугольных осей X_C, $У_C$, Z_C, проходящих через точку С - его центр масс (при условии, что ось Z_C совпадает с осью цилиндра), не одинаковы

$$J_{ZC} = \frac{1}{2}mR^2; \quad J_{XC} = J_{YC} = \frac{1}{12}ml^2.$$

Однако для любого тела существует инвариантная характеристика, не зависящая от направления осей и определяющая инерционные свойства тела при вращательном движении. Она подобна массе тела, определяющей его инерционные свойства и являющейся инвариантной характеристикой тела при поступательном движении. При вращении же тела инвариантной, характеристикой является *тензор инерции*, который можно сопоставить с каждой точкой этого тела. Вообще тензор - это сложное математическое понятие и подробное изучение его свойств не входит в программу курса общей физики. Отметим лишь один из инвариантов тензора инерции - линейный инвариант

$$J_I = J_X + J_Y + J_Z = \text{inv}. \tag{9}$$

В справедливости (9) можно убедиться, если вычислить моменты инерции произвольного тела К относительно прямоугольных осей X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, проведенных в какой-либо точке этого тела и расположенных под углом друг к другу (рис. 1). Положение элемента массы dm тела будем определять радиус-вектором $\vec{r}$ проведенным из начала координат. Тогда относительно осей X_1, Y_1, Z_1 можно составить сумму моментов инерции

$$J_{X1}+J_{Y1}+J_{Z1}=\int\limits_{(K)}\left(y_1^2+z_1^2\right)dm+\int\limits_{(K)}\left(x_1^2+z_1^2\right)dm+$$

$$+\int\limits_{(K)}\left(x_1^2+y_1^2\right)dm=2\int\limits_{(K)}\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)dm=2\int\limits_{(K)}r^2dm \tag{10}$$

Аналогично вычислим сумму моментов инерции относительно X, У, Z;

$$J_{X2}+J_{Y2}+J_{Z2}=\int\limits_{(K)}\left(y_2^2+z_2^2\right)dm+\int\limits_{(K)}\left(x_2^2+z_2^2\right)dm+$$

$$+\int\limits_{(K)}\left(x_2^2+y_2^2\right)dm=2\int\limits_{(K)}\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)dm=2\int\limits_{(K)}r^2dm \tag{11}$$

Из сравнения (10) и (11) находим

$$J_{X1}+J_{Y1}+J_{Z1}=J_{X2}+J_{Y2}+J_{Z2}$$

Работа М-5.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА ПО МЕТОДУ КОЛЕБАНИЙ

Теоретическая часть

Для определения момента инерции тела по методу колебаний возьмем однородное колесо, которое может вращаться вокруг оси $O_1O_1^\circ$, совпадающей с его геометрической осью (рис. 2). Центр масс такого колеса находится на оси вращения $O_1O_1^\circ$. При прикреплении к колесу в каком-либо месте тела массой m (рис. 2) центр масс системы колесо-тело сместится по направлению прикрепленного тела.

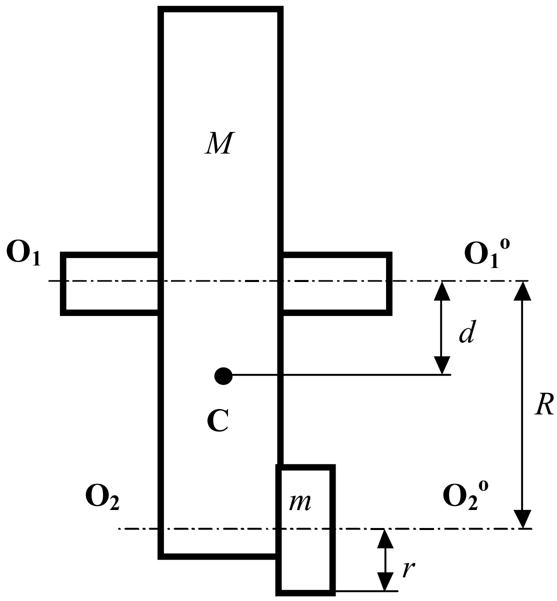

Рис.2

Если механическую систему, у которой центр масс не находится на оси вращения, вывести из положения равновесия (повернуть на некоторый угол), то под действием силы тяжести система будет колебаться вокруг оси вращения как физический маятник. Поэтому к ней могут быть применены все формулы и выводы, относящиеся к теории физического маятника. В частности, период колебания физического маятника

$$T_O=2\pi\sqrt{\frac{J_O}{M_O g d_0}}, \tag{12}$$

где J_0 - момент инерции физического маятника относительно оси вращения;
M_0 - масса маятника;
g - ускорение свободного падения;
d_0- расстояние от центра масс маятника до оси вращения.

Для колеса с прикрепленным телом формула (12) имеет вид

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_1+J_2}{\left(M+m\right)gd}}, \tag{13}$$

где J_1 - момент инерции однородного колеса относительно оси вращения $O_1O_1^\circ$;
J_2 - момент инерции прикрепленного тела относительно оси вращения $O_1O_1^\circ$;
M - масса колеса;
m - масса тела;
d - расстояние от центра масс системы колесо-тело до оси вращения (рис. 2).
Из формулы (25) определяем момент инерции колеса

$$J_1 = \frac{(M+m)gdT^2}{4\pi^2} - J_2 . \tag{14}$$

По теореме Штейнера

$$J_2 = J_{02} + mR^2 , \tag{15}$$

где R - расстояние от центра масс тела до оси вращения $O_1O_1°$;

J_{O2} - момент инерции тела относительно оси $O_2O_2°$, проходящей через его центр масс.

Для тела, имеющего форму цилиндра радиусом r, момент инерции относительно его геометрической оси

$$J_{02} = \frac{1}{2}mr^2 . \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), получим

$$J_2 = \frac{1}{2}mr^2 + mR^2 . \tag{17}$$

Центр масс произвольной механической системы, состоящей из k тел, относительно какой-либо точки, например точки А, определяется по формуле

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} , \tag{18}$$

где $\vec{r}_C$ - радиус-вектор центра масс этой системы относительно точки А;

m_i ; $\vec{r}_i$ - соответственно масса и радиус-вектор i-го тела механической системы относительно точки А.

Если начало отсчета (точку А) расположить на оси вращения $O_1O_1°$, то для системы колесо-тело, согласно (18), имеем

$$d = \frac{m}{m+M} R . \tag{19}$$

Подставляя (17) и (19) в (14), после преобразований получим

$$J_1 = \frac{mRgT^2}{4\pi^2} - m\left(\frac{r^2}{2} + R^2\right). \tag{20}$$

Все величины, стоящие в правой части равенства, определяются из опыта. Следовательно, по этой формуле можно найти момент инерции колеса.

ВЫПОЛНЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

1. Измерьте штангенциркулем диаметр цилиндра. Определите его радиус r.
2. Измерьте штангенциркулем расстояние R между осями $O_1O_1°$ и $O_2O_2°$.
3. Выведите систему колесо-тело из положения равновесия, повернув на небольшой угол. Система под действием силы тяжести будет совершать колебательное движение. В момент прохождения черты, нанесенной на ободе колеса (через положение равновесия) включите миллисекундомер. Найдите время t_N для N=10 полных колебаний. Период колебаний определяется по формуле $T = t_N/N$.
4. Повторите операции п. 3 n = 5 раз.
5. Определите по n опытам среднее значение периода колебаний

$$< T > = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i}{n} .$$

6. По формуле (20) вычислите момент инерции колеса, в качестве периода возьмите его среднее значение $<T>$.

Анализ и обработка результатов измерений.

Погрешность измерения момента инерции J_1 (погрешность косвенных измерений) определяется двумя факторами: случайной погрешностью измерения периода колебаний и инструментальной погрешностью используемых приборов - миллисекундомера и штангенциркуля. Для оценки погрешности косвенных измерений можно использовать следующий метод: за относительную погрешность искомой функции возьмем максимальную относительную погрешность ее аргументов $\varepsilon_J = max\{\varepsilon_T,\ \varepsilon_r,\ \varepsilon_R\}$**.** В данном случае основным фактором, определяющим погрешность измерения ε_J момента инерции, является погрешность измерения периода. Поэтому можно написать

$$\varepsilon_J = 2\frac{\Delta T}{< T >},$$

где ΔT - погрешность измерения периода, складывающаяся из случайной и инструментальной погрешностей. Однако при регистрации времени с помощью миллисекундомера инструментальная погрешность этого прибора существенно меньше случайной погрешности опыта. Поэтому полная погрешность измерения периода будет равна случайной погрешности и ее следует рассчитывать по формуле

$$\Delta T = t_{P,f}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - < T >\right)^2}{n(n-1)}},$$

где $f=n-1$;

n - число опытов, по которым найдено $<T>$.

$t_{P,f}$ - коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности P= 0,68 и числа измерений n.

Вычислите абсолютную погрешность измерения момента инерции по формуле $\Delta J_1=\varepsilon_J J_1$. Используя действия над приближенными числами, запишите окончательный результат в виде $J_1 \pm \Delta J_1$**.**

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Выведите формулу для периода колебаний математического маятника, используя формулу для периода колебаний физического маятника.
2. Дайте определение момента инерции твердого тела относительно произвольной оси.
3. Сформулируйте теорему Штейнера.
4. Как изменится расстояние d (см. рис. 2), если массу прикрепленного тела увеличить?

Литература

Савельев И.В. Курс общей физики. - М.: Наука, 1982. - Т. 1, 432 с.